Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 1xx (201x) **Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova**

STRUCTURE D'ALGEBRE DE GERSTENHABER-VORONOV SUR LES FORMES DIFFERENTIELLES NON COMMUTATIVES

Hatem Issaoui* – Naoufel Battikh**

Abstract – The algebra of noncommutative differential forms has been defined by A. Connes in [4]. Using this algebra, M. Karoubi has defined cyclic homology and Hochschild homology groups (see [13]). These groups are related to the algebraic K-theory. The purpose of this paper is to provide the noncommutative differential forms algebra with the structure of Gerstenhaber-Voronov algebras.

Mathematics Subject Classification (2010). 55S99 .

Keywords. Noncommutative differential forms, Gerstenhaber-Voronov algebra.

1. Introduction

Pour un anneau commutatif k et une k -algèbre unitaire A, l'algèbre des formes différentielles non commutatives $\Omega^*(A)$ est une algèbre différentielle graduée qui a été définie par Alain Connes dans [4].(Voir aussi [14]). En munissant cette algèbre d'une certaine différentielle de degré -1 b, on définit l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique . Ces deux homologies sont entre autres reliées aux groupes de K-théorie algébrique $K_n(A)$ (cf. [13]). Pour un espace topologique X qui a le type d'homotopie d'un CW-complexe et en choisissant une algèbre précise A ayant une certaine topologie, on définit l'algèbre différentielle graduée $\Omega^*(X)$ qui est l'ensemble des applications continues de X dans $\Omega^*(A)$. La cohomologie de

*

**.

Hatem Issaoui, Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Nabeul, Université de Carthage, Campus universitaire, Merazka, 8000, Nabeul. Tunisie
E-mail: hatem_issaoui@yahoo.com

Naoufel BATTIKH, Département des mathématiques, Faculté des sciences de Tunis, Université Tunis El Manar, Tunisia
E-mail: naoufelbattikh@yahoo.fr

$\Omega^*(X)$ coïncide alors avec la cohomologie singulière de $H^*(X;k)$ (cf. [12]). En définissant des morphismes sur $\Omega^*(A)$, on peut alors construire des opérations cohomologiques. C'est ainsi qu'on définit d'une manière totalement explicite les carrés de Steenrod (cf. [1]). Le but de cet article est de munir l'algèbre des formes différentielles non commutative de la structure d'algèbres de Gerstenhaber-Voronov. Cette dernière structure a été introduite par Gerstenhaber et Voronov dans [7] (voir aussi [9]). Elle est définie par la donnée d'une $\mathbb{Z}/2-$algèbre différentielle graduée $(A, d, .)$ et d'une suite d'opérations de degré $-k$:

$$E_{1,k} : A \otimes \left(A^{\otimes k}\right) \longrightarrow A$$

où $k \in \mathbb{N}$, vérifiant certaines conditions de cohérence. Une de ces conditions induit l'identité suivante:

$$dE_{1,1}(a; b) + E_{1,1}(da; b) + E_{1,1}(a; db) = ba + ab$$

Ainsi $E_{1,1}$ est une homotopie mesurant la non commutativité de A. Dans le cas des formes différentielles non commutatives, l'opération $E_{1,1}$ coïncide avec le cup 1-produit noté $\underset{1}{\smile}$ tel que défini dans [1]. En notant

$$E_{1,1}(a; b) = a \underset{1}{\smile} b$$

pour une structure d'algèbre de Gerstenhaber-Voronov quelconque, on a en particulier la propriété suivante:

$$(a.b) \underset{1}{\smile} c + a.\left(b \underset{1}{\smile} c\right) + \left(a \underset{1}{\smile} c\right).b = 0$$

Ceci veut dire que $E_{1,1} = \underset{1}{\smile}$ satisfait la formule de Hirsch. On a aussi cette propriété:

$$\left(a \underset{1}{\smile} b\right) \underset{1}{\smile} c + a \underset{1}{\smile} \left(b \underset{1}{\smile} c\right) = E_{1,2}(a; b, c) + E_{1,2}(a; c, b)$$

C'est-à-dire que $E_{1,2}$ mesure le défaut d'associativité de l'opération $E_{1,1} = \underset{1}{\smile}$.

Comme exemple d'algèbre de Gerstenhaber-Voronov, on peut citer le complexe de cochaines $C^*(X)$ d'un ensemble simplicial. Les opérations $E_{1,k}$ étant les duales des coopérations définies par Baues dans [2]. On peut aussi citer l'exemple du complexe de cochaines de Hochschild. Dans ce cas les opérations $E_{1,k}$ ont été définies dans [9]. La construction cobar d'une bialgèbre différentielle graduée est aussi un exemple d'algèbre de Gerstenhaber-Voronov (cf.[10]).
Pour une algèbre de Gerstenhaber-Voronov, les opérations $E_{1,k}$ définissent sur la construction bar BA d'une algèbre différentielle graduée $(A, d, .)$ une multiplication rendant BA une $B(\infty)$-algèbre (cf.[9]). Notons enfin que la cohomologie associée à une algèbre de Gerstenhaber-Voronov admet une structure d'algèbre de Gerstenhaber (cf. [6] et [?].

2. rappels

2.1 – *Rappel sur les formes différentielles non commutatives*

Rappelons brièvement les définitions des formes différentielles non commutatives données dans [4] et [11] . Soient k un anneau commutatif unitaire et A une k-algèbre unitaire. Les formes différentielles étendues de degré n sont les éléments du produit tensoriel de k-modules

$$T^n(A) = A \otimes A \otimes \cdots \otimes A$$

($n+1$ facteurs). Sur $T^*(A) = \underset{n\geq 0}{\oplus} T^n(A)$, on définit un opérateur de carré nul

$$D : T^n(A) \longrightarrow T^{n+1}(A)$$

par la formule suivante :

$$D(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) =$$
$$1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n - a_0 \otimes 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n + \cdots + (-1)^{n+1} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1$$

et un produit

$$T^n(A) \otimes T^p(A) \longrightarrow T^{n+p}(A)$$

par la formule

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)(b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p) = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p.$$

Pour toutes formes $w \in T^n(A)$ et $\theta \in T^p(A)$, la différentielle D vérifie l'identité de Leibniz

$$D(w\theta) = D(w)\theta + (-1)^n wD(\theta).$$

On a en outre une action à droite du groupe symétrique $\mathcal{S}_{n+1}$ sur $T^n(A)$. En effet, en identifiant $\mathcal{S}_{n+1}$ à l'ensemble des permutations de $\{0, 1, ..., n\}$, l'action est définie par la formule suivante :

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)^\sigma = a_{\sigma(0)} \otimes a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)}.$$

Pour une k-algèbre A on pose $\Omega^0(A) = A$ et $\Omega^1(A)$ le noyau de l'application

$$\begin{array}{c} A \otimes A \longrightarrow A \\ x \otimes y \longrightarrow xy \end{array}$$

Le produit tensoriel étant celui de k-modules. En fait le k-module $\Omega^1(A)$ est aussi un A-bimodules et les formes différentielles non commutatives de degré n sont les éléments du produit tensoriel de A-modules

$$\Omega^n(A) = \Omega^1(A) \underset{A}{\otimes} \Omega^1(A) \underset{A}{\otimes} \cdots \underset{A}{\otimes} \Omega^1(A) \text{ (n facteurs de } \Omega^1(A)).$$

La somme $\Omega^*(A) = \underset{n\geq 0}{\oplus} \Omega^n(A)$ est une algèbre graduée de manière évidente. Le produit de deux formes étant obtenu en juxtaposant les produits tensoriels. Considérons l'homomorphisme de k-modules

$$d : \Omega^0 (A) \longrightarrow \Omega^1 (A)$$

défini par la formule

$$d (a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$$

On a alors l'isomorphisme suivant

$$\begin{array}{c} A \otimes A/k \longrightarrow \Omega^1 (A) \\ x \otimes \bar{y} \longrightarrow xdy \end{array}$$

(Le produit tensoriel étant celui de k-modules). L'ensemble $\Omega^n (A)$ des formes différentielles non commutatives de degré n s'identifie alors au produit tensoriel de k-modules

$$A \otimes A/k \otimes \cdots \otimes A/k \text{ (n facteurs } A/k \text{).}$$

Une forme différentielle non commutative de degré n s'écrit donc comme combinaison linéaire de termes de la forme

$$a_0 da_1 \cdots da_n$$

et le morphisme d s'étend aux formes de degré n de $\Omega^* (A)$ par la formule

$$d (a_0 da_1 \cdots da_n) = da_0 da_1 \cdots da_n.$$

Ce morphisme est de carré nul et vérifie, pour toutes formes $w \in \Omega^n (A)$ et $\theta \in \Omega^p (A)$, l'identité de Leibniz :

$$d (w\theta) = dw\theta + (-1)^n wd\theta$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\Omega^n (A) \subset \left(A \underset{k}{\otimes} A \right) \underset{A}{\otimes} \left(A \underset{k}{\otimes} A \right) \underset{A}{\otimes} \cdots \underset{A}{\otimes} \left(A \underset{k}{\otimes} A \right) \simeq A \underset{k}{\otimes} A \underset{k}{\otimes} \cdots \underset{k}{\otimes} A = T^n (A) .$$

L'algèbre différentielle graduée $\Omega^* (A)$ est donc incluse dans $T^* (A)$.
On définit sur les formes différentielles étendues de degré n un produit, noté #, par la formule suivante :

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \# (b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) = a_0 b_0 \otimes a_1 b_1 \otimes \cdots \otimes a_n b_n.$$

Rappelons d'autre part, que si A est une k-algèbre commutative, une application

$$f : [n] \longrightarrow [m]$$

(où pour tout $p \in \mathbb{N}$, $[p]$ désigne l'ensemble $\{0, 1, ..., p\}$), induit un morphisme

$$f_* : T^n (A) \longrightarrow T^m (A)$$

défini par la correspondance

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_m$$

où pour tout $j \in [m]$

$$b_j = \begin{cases} 1 & \text{si } f^{-1} (\{j\}) \text{ est vide} \\ \prod\limits_{f(i)=j} a_i & \text{sinon} \end{cases}$$

On montre alors que pour toutes formes w et $\theta \in T^n(A)$, on a

$$f_*(w\#\theta) = f_*(w)\#f_*(\theta)$$

et que si $w \in T^n(A)$ et $\theta \in T^p(A)$, on a

$$w\theta = f_*(w)\#g_*(\theta).$$

L'application f étant l'inclusion de $[n]$ dans $[n+p]$ et $g : [p] \longrightarrow [n+p]$ est défini par $g(i) = i+n$. Pour alléger les notations dans ce qui suit, on notera f l'homomorphisme induit sur les formes étendues par une application $f : [n] \longrightarrow [m]$. Rappelons enfin que sur les formes étendues de degré n on a

$$D = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \delta_i$$

où les $\delta_i : [n] \longrightarrow [n+1]$ sont les opérateurs cofaces définis par $\delta_i(j) = j$ si $i > j$ et $\delta_i(j) = j+1$ si $i \leq j$ et que

$$\Omega^n(A) = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker s_i$$

où les $s_i : [n] \longrightarrow [n-1]$ sont les opérateurs de codégénérescence définis par $s_i(j) = j$ si $i \geq j$ et $s_i(j) = j-1$ si $i < j$.

2.2 – *Définition de la structure d' algèbre de Gerstenhaber-Voronov.*

Définition 2.1. Une algèbre de Gerstenhaber-Voronov est la donnée d'une $\mathbb{Z}/2-$algèbre différentielle graduée $(A, d, .)$ et d'une suite d'opérations de degré $-k$:

$$E_{1,k} : A \otimes \left(A^{\otimes k}\right) \longrightarrow A$$

où $k \in \mathbb{N}$ (On écrira $E_{1,k}(a; b_1, \cdots, b_k)$ au lieu de $E_{1,k}(a \otimes (b_1 \otimes \cdots \otimes b_k))$ satisfaisant les quatre conditions suivantes:

1. $E_{1,0} = id.$

2. $dE_{1,k}(a; b_1, \cdots, b_k) + E_{1,k}(da; b_1, \cdots, b_k) + \sum_{i=1}^{k} E_{1,k}(a; b_1, \cdots, db_i, \cdots, b_k) =$
$b_1 E_{1,k-1}(a; b_2, \cdots, b_k) + E_{1,k-1}(a; b_1, \cdots, b_{k-1})b_k +$
$\sum_{i=1}^{k-1} E_{1,k-1}(a; b_1, \cdots, b_i b_{i+1}, \cdots, b_k).$

3. $E_{1,k}(a_1 a_2; b_1, \cdots, b_k) =$
$a_1 E_{1,k}(a_2; b_1, \cdots, b_k) + E_{1,k}(a_1; b_1, \cdots, b_k)a_2$
$+\sum_{p=1}^{k-1} E_{1,p}(a_1; b_1, \cdots, b_p)\ E_{1,m-p}(a_2; b_{p+1}, \cdots, b_k).$

4. $E_{1,n}\left(E_{1,m}\left((a; b_1, \cdots, b_m)\right); c_1, \cdots, c_n\right) = \sum_{0 \leq i_1 \leq j_1 \leq \cdots \leq i_m \leq j_m \leq n}$
$E_{1,n-(j_1+\cdots+j_m)+(i_1+\cdots+i_m)+m}(a; c_1, \cdots, c_{i_1}, E_{1,j_1-i_1}\left(b_1; c_{i_1+1}, \cdots, c_{j_1}\right), c_{j_1+1}, \cdots, c_{i_2},$
$E_{1,j_2-i_2}\left(b_2; c_{i_2+1}, \cdots, c_{j_2}\right), c_{j_2+1}, \cdots, c_{i_m}, E_{1,j_m-i_m}\left(b_m; c_{i_m+1}, \cdots, c_{j_m}\right), c_{j_m+1}, \cdots, c_n)$

Comme exemple d'algèbre de Gerstenhaber-Voronov, on peut citer le complexe de cochaines $C^*(X)$ d'un ensemble simplicial. Les opérations $E_{1,k}$ étant les duales des coopérations définies par Baues dans [2]. On peut aussi citer l'exemple du complexe de cochaines de Hochschild. Dans ce cas les opérations $E_{1,k}$ ont été définies dans [9]. La construction cobar d'une bialgèbre différentielle graduée est aussi un exemple d'algèbre de Gerstenhaber-Voronov (cf.[10]).
Pour une algèbre de Gerstenhaber-Voronov, les opérations $E_{1,k}$ définissent sur la construction bar BA d'une algèbre différentielle graduée $(A, d, .)$ une multiplication rendant BA une $B(\infty)$-algèbre (cf. [9]). En outre, la cohomologie associée à une algèbre de Gerstenhaber-Voronov admet une structure d'algèbre de Gerstenhaber (cf. [6] et [7]).

3. Structure d'algèbre de Gerstenhaber-Voronov sur les formes différentielles non commutatives.

Dans la suite A désignera une $\mathbb{Z}/2$-algèbre.

Définition 3.1. Pour tout $k \geq 0$, on définit des opérations $E_{1,k}$ de degré $-k$:

$$E_{1,k} : T^*(A) \otimes (T^*(A))^{\otimes k} \longrightarrow T^*(A)$$

de la façon suivante:

1. $E_{1,0} = Id$
2. Pour tous $\omega = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \in T^p(A)$, $\theta_1, \cdots, \theta_k \in T^*(A)$, on pose

$$E_{1,k}(\omega \otimes \theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_k) = \sum_{\substack{0 \leq j_1 < \cdots < j_k < p \\ p \geq k}} \omega_{0,j_1}\theta_1\omega_{j_1+1,j_2}\theta_2\omega_{j_2+1,j_3}\cdots\theta_k\omega_{j_k+1,p}, \text{ si}$$

et

$$E_{1,k}(\omega \otimes \theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_k) = 0, \text{ si } p < k$$

La forme $\omega_{r,s}$ désignant $a_r \otimes a_{r+1} \otimes \cdots \otimes a_s$ et $\omega_{r,r} = a_r$. Dans la suite, on notera $E_{1,k}(\omega; \theta_1, \cdots, \theta_k)$ au lieu de $E_{1,k}(\omega \otimes \theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_k)$

Remarque 3.2. L'opération $E_{1,1}$ coïncide avec le cup 1-produit des formes différentielles étendues (cf. [1]). En effet, pour $\omega = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \in T^p(A)$ et $\theta = b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q \in T^q(A)$, on a

$$E_{1,1}(\omega; \theta) = \sum_{0 \leq j_1 < p} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{j_1}b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q a_{j_1+1} \otimes \cdots \otimes a_p = \omega \underset{1}{\smile} \theta$$

Théorème 3.3. L'algèbre des formes différentielles étendues $T^*(A)$, munie des opérations $E_{1,k}$ est une algèbre de Gerstenhaber-Voronov.

Démonstration 3.4. Montrons donc les quatre conditions:

Soient $\omega = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \in T^p(A)$ et $\theta_1, \cdots, \theta_k \in T^*(A)$

Condition 1. Montrons d'abord que

$$\begin{gathered} E_{1,k}(D\omega; \theta_1, \cdots, \theta_k) = \\ \sum_{i=1}^{k} \sum_{0 \le j_1 < \cdots < j_k < p} \omega_{0,j_1}\theta_1\omega_{j_1+1,j_2}\theta_2 \cdots D\left(\omega_{j_i+1,j_{i+1}}\right)\theta_{i+1}\cdots\theta_k\omega_{j_l+1,p} + \\ \theta_1 E_{1,k-1}(\omega; \theta_2, \cdots, \theta_k) + E_{1,k-1}(\omega; \theta_1, \cdots, \theta_{k-1})\theta_k + \\ \sum_{i=1}^{k-1} E_{1,k-1}(\omega; \theta_1, \cdots, \theta_i\theta_{i+1}, \cdots \theta_k) \end{gathered}$$

Pour $p = k-1$, on aura

$$\begin{gathered} E_{1,k}(D\omega; \theta_1, \cdots, \theta_k) = \\ \theta_1 E_{1,k-1}(\omega; \theta_2, \cdots, \theta_k) + E_{1,k-1}(\omega; \theta_1, \cdots, \theta_{k-1})\theta_k + \\ \sum_{i=1}^{k-1} E_{1,k-1}(\omega; \theta_1, \cdots, \theta_i\theta_{i+1}, \cdots \theta_k) \end{gathered}$$

On a

$$E_{1,k}(D\omega; \theta_1, \cdots, \theta_k) = \sum_{i=0}^{p+1} E_{1,k}\left(\omega^i; \theta_1, \cdots, \theta_k\right)$$

où $\omega^i = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_p$. Or

$$E_{1,k}\left(\omega^i; \theta_1, \cdots, \theta_k\right) = \sum_{0 \le j_1 < \cdots < j_k < p+1} \omega^i_{0,j_1}\theta_1\omega^i_{j_1+1,j_2}\theta_2 \cdots \theta_k\omega^i_{j_k+1,p+1}$$

On notera J l'ensemble des ensembles $\{j_1, \cdots, j_k\}$ tels que $0 \le j_1 < \cdots < j_k < p+1$. Pour un i fixé, on a $J = \bigsqcup_{\alpha=0}^{k} J_\alpha$ où J_α contient les ensembles $\{j_1, \cdots, j_k\}$ tels que $0 \le j_1 < \cdots < j_\alpha < i \le j_{\alpha+1} < \cdots < j_k < p+1$. J_0 contient les $\{j_1, \cdots, j_k\}$ tels que $i \le j_1 < \cdots < j_k < p+1$ et J_k contient les $\{j_1, \cdots, j_k\}$ tels que $0 \le j_1 < \cdots < j_k < i$. On notant j un ensemble $\{j_1, \cdots, j_k\}$, on a $J_\alpha = X_\alpha \sqcup Y_\alpha$ avec $X_\alpha = \{j \in J_\alpha / j_\alpha + 1 = i = j_{\alpha+1}\}$ et $Y_\alpha = J_\alpha \backslash X_\alpha$. Puisque cette réunion est disjointe on a

$$\begin{gathered} E_{1,k}\left(\omega^i; \theta_1, \cdots, \theta_k\right) = \sum_{\alpha=1}^{k-1}\sum_{j \in X_\alpha} \omega^i_{0,j_1}\theta_1\omega^i_{j_1+1,j_2}\theta_2 \cdots \theta_k\omega^i_{j_k+1,p+1} + \\ \sum_{\alpha=1}^{k-1}\sum_{j \in Y_\alpha} \omega^i_{0,j_1}\theta_1\omega^i_{j_1+1,j_2}\theta_2 \cdots \theta_k\omega^i_{j_k+1,p+1} + \\ \sum_{j \in J_0} \omega^i_{0,j_1}\theta_1\omega^i_{j_1+1,j_2}\theta_2 \cdots \theta_k\omega^i_{j_k+1,p+1} + \\ \sum_{j \in J_k} \omega^i_{0,j_1}\theta_1\omega^i_{j_1+1,j_2}\theta_2 \cdots \theta_k\omega^i_{j_k+1,p+1} \end{gathered}$$

Pour $j \in X_\alpha$ et $1 \le i \le p$, on a

$$\omega^i_{0,j_1}\theta_1\omega^i_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\theta_k\omega^i_{j_k+1,p+1} =$$
$$\omega_{0,j_1}\theta_1\omega_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\omega_{j_{\alpha-1}+1,i-1}\theta_\alpha\theta_{\alpha+1}\omega_{i,j_{\alpha+2}-1}\cdots\theta_k\omega_{j_k,p} =$$
$$\omega_{0,j_1}\theta_1\omega_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\omega_{j_{\alpha-1}+1,i-1}\theta_\alpha\theta_{\alpha+1}\omega_{i,j_{\alpha+2}}\cdots\theta_k\omega_{j_k+1,p}$$

Ceci en faisant le changement d'indice $j'_s = j_{s+1} - 1$ pour $\alpha + 1 \leq s \leq k$. On a donc

$$\sum_{\alpha=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{X_\alpha}\omega^i_{0,j_1}\theta_1\omega^i_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\theta_k\omega^i_{j_k+1,p+1} =$$
$$\sum_{\alpha=1}^{k-1}\sum_{0\leq j_1<\cdots<j_{k-1}<p}\omega_{0,j_1}\theta_1\omega_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\omega_{j_{\alpha-1}+1,j_\alpha}\theta_\alpha\theta_{\alpha+1}\omega_{j_\alpha+1,j_{\alpha+1}}\cdots\theta_k\omega_{j_{k-1}+1,p} =$$
$$\sum_{\alpha=1}^{k-1}E_{1,k-1}\left(\omega;\theta_1,\cdots,\theta_\alpha\theta_{\alpha+1},\cdots,\theta_k\right) \qquad (I)$$

Pour $j \in Y_\alpha$ et $1 \leq i \leq p$, on a

$$\omega^i_{0,j_1}\theta_1\cdots\omega^i_{j_{\alpha-1}+1,j_\alpha}\theta_\alpha\omega^i_{j_\alpha+1,j_{\alpha+1}}\cdots\theta_k\omega^i_{j_k+1,j_{p+1}} =$$
$$\omega_{0,j_1}\theta_1\cdots\omega_{j_{\alpha-1}+1,j_\alpha}\theta_\alpha\delta_i\left(\omega_{j_\alpha+1,j_{\alpha+1}-1}\right)\cdots\theta_k\omega_{j_k,j_p}$$

Où $\delta_i\left(\omega_{j_\alpha+1,j_{\alpha+1}-1}\right) = a_{j_\alpha+1}\otimes\cdots\otimes 1\otimes\cdots\otimes a_{j_{\alpha+1}-1}$. Ce qui donne, en faisant le même changement d'indice que précédemment,

$$\sum_{\alpha=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{Y_\alpha}\omega^i_{0,j_1}\theta_1\omega^i_{j_1+1,j_2}\cdots\theta_k\omega^i_{j_k+1,p+1} =$$
$$\sum_{\alpha=1}^{k-1}\sum_{0\leq j_1<\cdots<j_k<p}\omega_{0,j_1}\theta_1\cdots D\left(\omega_{j_\alpha+1,j_{\alpha+1}}\right)\cdots\theta_k\omega_{j_k+1,p} \qquad (II)$$

Pour $j \in J_0$ et $1 \leq i \leq p$, on a

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{J_0}\omega^i_{0,j_1}\theta_1\omega^i_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\theta_k\omega^i_{j_l+1,p+1} =$$
$$\sum_{0\leq j_1<\cdots<j_k<p}D\left(\omega_{0,j_1}\right)\theta_1\omega_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\theta_k\omega_{j_l+1,p}+$$
$$\sum_{0\leq j_1<\cdots<j_k<p}1\otimes\omega_{0,j_1}\theta_1\omega_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\theta_k\omega_{j_l+1,p} \quad (III)$$

Pour $j \in J_k$ et $1 \leq i \leq p$, on a

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{J_k}\omega^i_{0,j_1}\theta_1\omega^i_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\theta_k\omega^i_{j_l+1,p+1} =$$
$$\sum_{0\leq j_1<\cdots<j_k<p}\omega_{0,j_1}\theta_1\omega_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\theta_k D\left(\omega_{j_l+1,p}\right)+$$
$$\sum_{0\leq j_1<\cdots<j_k<p}\omega_{0,j_1}\theta_1\omega_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\theta_k\omega_{j_l+1,p}\otimes 1 \quad (IV)$$

Pour achever la démonstration de cette première condition, il reste à développer $E_{1,k}\left(\omega^0;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)$ et $E_{1,k}\left(\omega^{p+1};\theta_1,\cdots,\theta_k\right)$. On a d'une part:

$$E_{1,k}\left(\omega^0;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)=\sum_{0\le j_1<\cdots<j_k<p+1}\omega^0_{0,j_1}\theta_1\omega^0_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\theta_k\omega^0_{j_k+1,p+1}=$$
$$\sum_{j_1=0}\omega^0_{0,j_1}\theta_1\omega^0_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\theta_k\omega^0_{j_k+1,p+1}+\sum_{j_1>0}\omega^0_{0,j_1}\theta_1\omega^0_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\theta_k\omega^0_{j_k+1,p+1}=$$
$$\theta_1E_{1,k-1}\left(\omega;\theta_2,\cdots,\theta_k\right)+1\otimes E_{1,k}\left(\omega;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)\quad (V)$$

Et d'autre part:

$$E_{1,k}\left(\omega^{p+1};\theta_1,\cdots,\theta_k\right)=\sum_{0\le j_1<\cdots<j_k<p+1}\omega^{p+1}_{0,j_1}\theta_1\omega^{p+1}_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\theta_k\omega^{p+1}_{j_k+1,p+1}=$$
$$\sum_{j_k=p}\omega^{p+1}_{0,j_1}\theta_1\omega^{p+1}_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\theta_k\omega^{p+1}_{j_k+1,p+1}+\sum_{j_k<p}\omega^{p+1}_{0,j_1}\theta_1\omega^{p+1}_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\theta_k\omega^{p+1}_{j_k+1,p+1}=$$
$$E_{1,k-1}\left(\omega;\theta_2,\cdots,\theta_{k-1}\right)\theta_k+E_{1,k}\left(\omega;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)\otimes 1\quad (VI)$$

Les égalités $(I)+(II)+(III)+(IV)+(V)+(VI)$ donnent la condition 1 y compris pour le cas $p=k-1$.

Démontrons maintenant la condition 2. Soient $a=a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_p$, $b=b_0\otimes b_1\otimes\cdots\otimes b_q$, $\theta_1,\cdots,\theta_k\in T^*(A)$. On va montrer que

$$E_{1,k}\left(ab;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)=aE_{1,k}\left(b;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)+E_{1,k}\left(a;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)b+$$
$$\sum_{i=1}^{k-1}E_{1,i}\left(a;\theta_1,\cdots,\theta_i\right)E_{1,k-i}\left(b;\theta_{i+1},\cdots,\theta_k\right)$$

Premier cas: $p\ge k$ et $q\ge k$. On pose alors $\omega=ab$ et $\alpha=p+q$. On note J l'ensemble des ensembles $\{j_1,\cdots,j_k\}$ tels que $0\le j_1<\cdots<j_k<\alpha$. On notera j l'ensemble $\{j_1,\cdots,j_k\}$. On a alors $J=\bigsqcup_{i=0}^{k}J_i$ avec

$$J_i=\{j\in J\text{ tel que }j_i<p\le j_{i+1}\},\text{ pour }1\le i\le k-1$$
$$J_0=\{j\in J\text{ tel que }p\le j_1<\cdots<j_k<\alpha\}$$
$$J_k=\{j\in J\text{ tel que }j_1<j_2<\cdots<j_k<p\}$$

On a alors

$$E_{1,k}\left(ab;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)=\sum_J\omega_{0,j_1}\theta_1\omega_{j_1+1,j_2}\theta_2\cdots\theta_k\omega_{j_k+1,\alpha}=$$
$$\sum_{J_0}\omega_{0,j_1}\theta_1\cdots\theta_k\omega_{j_k+1,\alpha}+\sum_{J_k}\omega_{0,j_1}\theta_1\cdots\theta_k\omega_{j_k+1,\alpha}+\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{J_i}\omega_{0,j_1}\theta_1\cdots\theta_k\omega_{j_k+1,\alpha}$$

Or on a

$$\sum_{J_0}\omega_{0,j_1}\theta_1\cdots\theta_k\omega_{j_k+1,\alpha}=a\sum_{p\le j_1<\cdots<j_k<\alpha}b_{0,j_1-p}\,\theta_1b_{j_1-p+1,j_2-p}\cdots\theta_kb_{j_k-p+1,\alpha}=$$
$$aE_{1,k}\left(b;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)$$

De même on a,

$$\sum_{J_k}\omega_{0,j_1}\theta_1\cdots\theta_k\omega_{j_k+1,\alpha}=E_{1,k}\left(a;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)b$$

Maintenant on a,

$$\sum_{J_i}\omega_{0,j_1}\theta_1\cdots\theta_k\omega_{j_k+1,\alpha}=$$
$$\sum_{0\le j_1<\cdots<j_i<p\le j_{i+1}<\cdots<j_k<\alpha} a_{0,j_1}\theta_1\cdots\theta_i a_{j_i+1,p}b_{0,j_{i+1}-p}\theta_{i+1}\cdots\theta_k b_{j_k+1-p,q}=$$
$$\sum_{0\le j_1<\cdots<j_i<p} a_{0,j_1}\theta_1\cdots\theta_i a_{j_i+1,p}\sum_{p\le j_{i+1}<\cdots<j_k<\alpha} b_{0,j_{i+1}-p}\theta_{i+1}\cdots\theta_k b_{j_k+1-p,q}=$$
$$\sum_{0\le j_1<\cdots<j_i<p} a_{0,j_1}\theta_1\cdots\theta_i a_{j_i+1,p}\sum_{0\le j_1<\cdots<j_{k-i}<q} b_{0,j_1}\theta_{i+1}\cdots\theta_k b_{j_{k-i}+1,q}=$$
$$E_{1,i}\left(a;\theta_1,\cdots,\theta_i\right)E_{1,k-i}\left(b;\theta_{i+1},\cdots,\theta_k\right)$$

D'où le résultat. Deuxième cas: $p+q<k$. On a alors $E_{1,k}\left(ab;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)=E_{1,k}\left(b;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)=E_{1,k}\left(a;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)=0$. D'autre part, on a, $i\le p\Longleftrightarrow k-i>q$. Donc $E_{1,i}\left(a;\theta_1,\cdots,\theta_i\right)E_{1,k-i}\left(b;\theta_{i+1},\cdots,\theta_k\right)=0$, pour tout $1\le i\le k-1$

Troisième cas: $p+q=k$. On a alors

$$E_{1,k}\left(ab;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)=a_0\theta_1\cdots\theta_p a_p b_0\theta_{p+1}b_1\cdots\theta_k b_q=$$
$$E_{1,p}\left(a;\theta_1,\cdots,\theta_p\right)E_{1,k-p}\left(b;\theta_{p+1},\cdots,\theta_k\right)$$

Or on a,

$$E_{1,i}\left(a;\theta_1,\cdots,\theta_i\right)E_{1,k-i}\left(b;\theta_{i+1},\cdots,\theta_k\right)=0 \text{ pour tout } i\neq p$$

D'où la propriété. Quatrième cas: $\alpha=p+q>k$ avec $p<k$ et $q<k$. Dans ce cas $\forall\ 0\le j_1<\cdots<j_k<\alpha$, on a $j_{k-q}<p\le j_{p+1}$. En effet: Si $j_{k-q}\ge p$, on a $j_k\ge j_{k-1}+1\ge\cdots\ge j_{k-q}+1$, c'est-à-dire $j_k\ge j_{k-q}+q\ge p+q>k$. Ce qui n'est pas vrai. Ainsi, on a bien $j_{k-q}<p\le j_{p+1}$. D'où en notant J l'ensemble des ensembles $\{j_1,j_2,\cdots,j_k\}$ avec $0\le j_1<j_2<\cdots<j_k<\alpha$, on a $J=\bigsqcup_{i=k-p}^{p}J_i$, où J_i est l'ensemble des ensembles $\{j_1,j_2,\cdots,j_k\}$ tels que $0\le j_1<j_2<\cdots<j_i<p\le j_{i+1}<\cdots<j_k<\alpha$. D'où on a

$$E_{1,k}\left(ab;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)=$$
$$\sum_i\sum_{0\le j_1<\cdots<j_i<p} a_{0,j_1}\theta_1\cdots\theta_i a_{j_i+1,p}\sum_{p\le j_{i+1}<\cdots<j_k<\alpha} b_{0,j_{i+1}-p}\theta_{i+1}\cdots\theta_k b_{j_k+1-p,q}=$$
$$\sum_{i=k-p}^{p}E_{1,i}\left(a;\theta_1,\cdots,\theta_i\right)E_{1,k-i}\left(b;\theta_{i+1},\cdots,\theta_k\right)=$$
$$\sum_{i=1}^{k-1}E_{1,i}\left(a;\theta_1,\cdots,\theta_i\right)E_{1,k-i}\left(b;\theta_{i+1},\cdots,\theta_k\right)$$

D'où le résultat.

Cinquième cas: $\alpha=p+q>k$ et $p<k$. Pour toute suite $0\le j_1<j_2<\cdots<j_k<\alpha$, on a $j_{p+1}\ge p$. De même que ce qui précède, on obtient:

$$E_{1,k}\left(ab;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)=$$
$$aE_{1,k}\left(b;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)+\sum_{i=1}^{p}E_{1,i}\left(a;\theta_1,\cdots,\theta_i\right)E_{1,k-i}\left(b;\theta_{i+1},\cdots,\theta_k\right)=$$
$$aE_{1,k}\left(b;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)+E_{1,k}\left(a;\theta_1,\cdots,\theta_k\right)b+$$
$$\sum_{i=1}^{k-1}E_{1,i}\left(a;\theta_1,\cdots,\theta_i\right)E_{1,k-i}\left(b;\theta_{i+1},\cdots,\theta_k\right)$$

Ce qui achève la démonstration de la deuxième propriété. Démonstration de la troisième propriété:

Soient $a = a_0 \otimes \cdots \otimes a_p \in T^p(A)$, $b^1 \in T^{r_1}(A), \cdots, b^m \in T^{r_m}(A), c_1, \cdots$ et $c_n \in T^*(A)$. Montrons que

$$E_{1,n}\left(E_{1,m}\left(a; b^1, \cdots, b^m\right); c_1, \cdots c_n\right) = \sum_{0\le\mu_1\le\nu_1\le\cdots\le\mu_m\le\nu_m\le n} E_{1,n+m+\sum\mu_k-\sum\nu_k}(a; c_1, \cdots c_{\mu_1}, E_{1,\nu_1-\mu_1}\left(b^1; c_{\mu_1+1}, \cdots, c_{\nu_1}\right), c_{\nu_1+1}, \cdots, c_{\mu_2}, \cdots, E_{1,\nu_m-\mu_m}\left(b^m; c_{\mu_m+1}, \cdots, c_{\nu_m}\right), c_{\nu_m+1}, \cdots, c_n)$$

On a

$$E_{1,m}\left(a; b^1, \cdots, b^m\right) = \sum_{j\in J}\delta^j$$

Où $j = \{j_1, \cdots, j_m\}$, $J = \{j \text{ tel que } 0 \le j_1 < \cdots < j_m < p\}$ et $\delta^j = a_{0,j_1} b^1 a_{j_1+1,j_2} b^2 \cdots b^m a_{j_m+1,p} \in T^\alpha(A)$ où $\alpha = p + \sum_{i=1}^{m} r_i - m$

La propriété est vraie dans les cas triviaux, à savoir $p < m$ et $\alpha < n$. On a

$$E_{1,n}\left(E_{1,m}\left(a; b^1, \cdots, b^m\right); c_1, \cdots c_n\right) = \sum_{j\in J} E_{1,n}\left(\delta^j; c_1, \cdots c_n\right)$$

Pour un $j \in J$ fixé, on a

$$E_{1,n}\left(\delta^j; c_1, \cdots c_n\right) = \sum_{i\in I}\delta^j_{0,i_1} c_1 \delta^j_{i_1+1,i_2} c_2 \cdots c_n \delta^j_{i_n+1,\alpha}$$

Où $i = \{i_1, \cdots, i_n\}$ et $I = \{i\}$ tel que $0 \le i_1 < \cdots < i_n < \alpha$. Il existe deux suites $(\mu_k)_k$ et $(\nu_k)_k$ vérifiant:
1) $\mu_k \le \nu_k \le \mu_{k+1}$
2) $i_{\mu_k} < d_k \le i_{\mu_k+1}$ avec$d_k = j_k + \sum_{l=1}^{k-1} r_l - k + 1$
3) $i_{\nu_k} < g_k \le i_{\nu_k+1}$ avec $g_k = d_k + r_k$

On pose par convention $\mu_{m+1} = n$ et $j_{m+1} = p$. On a donc

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_{\mu_1} < d_1 \le i_{\mu_1+1} < i_{\mu_1+2} < \cdots < i_{\nu_1} < g_1 < i_{\nu_1+1} < \cdots < i_{\mu_2} < d_2 < \cdots$$
$$\cdots i_{\mu_k} < d_k \le i_{\mu_k+1} < i_{\mu_k+2} < \cdots < i_{\nu_k} < g_k \le i_{\nu_k+1} < \cdots < i_{\mu_{k+1}} < d_{k+1} < \cdots$$

Remarquons que:

d_k indique la longueur de $a_{0,j_1} b^1 a_{j_1+1,j_2} b^2 \cdots b^{k-1} a_{j_{k-1}+1,j_k}$

g_k indique la longueur de $a_{0,j_1} b^1 a_{j_1+1,j_2} b^2 \cdots b^{k-1} a_{j_{k-1}+1,j_k} b^k$

On pose $h_k = \sum_{l=1}^{k} r_l - k = g_k - j_k - 1$. Ceci donne:

$$\delta^j_{i_{\mu_k}+1,i_{\mu_k+1}} = a_{i_{\mu_k}+1-h_{k-1},j_k} b^k_{0,i_{\mu_k}+1-d_k}$$

Pour tout s tel que $\mu_k + 1 \leq s < \nu_k$, on a $\delta^j_{i_s+1,i_{s+1}} = b^k_{i_s+1-d_k,i_{s+1}-d_k}$

$$\delta^j_{i_{\nu_k}+1,i_{\nu_k+1}} = b^k_{i_\nu+1-d_k,r_k} a_{j_k+1,i_{\nu_k}+1} - h_k$$

Pour tout s tel que $\nu_k + 1 \leq s < \mu_{k+1}$, on a $\delta^j_{i_s+1,i_{s+1}} = a_{i_s+1-h_k,i_{s+1}-h_k}$

Plus précisément on a,

$$\begin{gathered}
\delta^j_{0,i_1} c_1 \delta^j_{i_1+1,i_2} \cdots c_n \delta^j_{i_n+1,\alpha} = \\
a_{0,i_1} c_1 a_{i_1+1,i_2} \cdots c_{\mu_1} a_{i_{\mu_1}+1,j_1} \\
b^1_{0,i_{\mu_1+1}-d_1} c_{\mu_1+1} b^1_{i_{\mu_1+1}+1-d_1,i_{\mu_1+2}-d_1} c_{\mu_1+2} \cdots c_{\nu_1} b^1_{i_{\nu_1}+1-d_1,r_1} \\
a_{j_1+1,i_{\nu_1}+1-h_1} c_{\nu_1+1} a_{i_{\nu_1}+1-h_1+1,i_{\nu_1+2}-h_1} c_{\nu_1+2} \ldots c_{\mu_2} a_{i_{\mu_2}+1-h_1,j_2} \\
\vdots \\
b^m_{0,i_{\mu_m+1}-d_m} c_{\mu_m+1} b^m_{i_{\mu_m+1}+1-d_1,i_{\mu_m+2}-d_m} c_{\mu_m+2} \cdots c_{\nu_m} b^m_{i_{\nu_m}+1-d_m,r_m} \\
a_{j_m+1,i_{\nu_m}+1-h_m} c_{\nu_m+1} a_{i_{\nu_m+1}-h_m+1,i_{\nu_m+2}-h_m} c_{\nu_m+2} \cdots c_n a_{i_n+1-h_m,p}.
\end{gathered}$$

Pour $(\mu_k)_k$, $(\nu_k)_k$ et j fixés, la forme où il y a b^k devient:

$$\begin{gathered}
b^k_{0,i_{\mu_k}+1-d_k} c_{\mu_k+1} b^k_{i_{\mu_k+1}+1-d_k,i_{\mu_k+2}-d_k} c_{\mu_k+2} \cdots c_{\nu_k} b^k_{i_{\nu_k}+1-d_k,r_k} = \\
b^k_{0,i_1} c_{\mu_k+1} b^k_{i_1+1,i_2} c_{\mu_k+2} \cdots c_{\nu_k} b^k_{i_{\nu_k}-\mu_k+1,r_k}
\end{gathered}$$

Avec $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{\nu_k-\mu_k} < r_k$. Ceci en faisant le changement de variable $i_s = i_{\mu_k+s} - d_k$ et en tenant compte du fait que:

$$d_k \leq i_{\mu_k+1} < \cdots < i_{\nu_k} < g_k = d_k + r_k.$$

On a donc,

$$\begin{gathered}
\sum_{d_k \leq i_{\mu_k+1} < i_{\mu_k+2} < \cdots < i_{\nu_k} < g_k} b^k_{0,i_{\mu_k+1}-d_k} c_{\mu_k+1} b^k_{i_{\mu_k+1}+1-d_k,i_{\mu_k+2}-d_k} c_{\mu_k+2} \cdots c_{\nu_k} b^k_{i_{\nu_k}+1-d_k,r_k} = \\
\sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{\mu_k-\nu_k} < r_k} b^k_{0,i_1} c_{\mu_k+1} b^k_{i_1+1,i_2} c_{\mu_k+2} \cdots c_{\nu_k} b^k_{i_{\mu_k-\nu_k}+1,r_k} = \\
E_{1,\nu_k-\mu_k}\left(b^k; c_{\mu_k+1}, c_{\mu_k+2}, \cdots, c_{\nu_k}\right)
\end{gathered}$$

Maintenant regardons pour des $(\mu_k)_k$, $(\nu_k)_k$ et j fixés, la forme où il y a a donne:

$$\begin{gathered}
a_{j_k+1,i_{\nu_k+1}-h_k} c_{\nu_k+1} a_{i_{\nu_k+1}-h_k+1,i_{\nu_k+2}-h_k} c_{\nu_k+2} \cdots c_{\mu_{k+1}} a_{i_{\mu_{k+1}}+1-h_k,j_{k+1}} = \\
a_{j_k+1,i_{\nu_k+1}} c_{\nu_k+1} a_{i_{\nu_k+1}+1,i_{\nu_k+2}} c_{\nu_k+2} \cdots c_{\mu_{k+1}} a_{i_{\mu_{k+1}}+1,j_{k+1}}
\end{gathered}$$

Avec $j_k < i_{\nu_k+1} < i_{\nu_k+2} < \cdots < i_{\mu_{k+1}} < j_{k+1}$. Ceci on l'obtient, en faisant le changement d'indice $i'_{\nu_k+s} = i_{\nu_k+s} - h_k$ et en remarquant que

$$\begin{gathered}
i_{\mu_{k+1}} < d_{k+1} \Longrightarrow i_{\mu_{k+1}} - h_k < d_{k+1} - h_k = \\
j_{k+1} + \sum_{l=1}^{k} r_l - (k+1) + 1 - \left(\sum_{l=1}^{k} r_l - k\right) = j_{k+1}
\end{gathered}$$

et que

$$i_{\nu_k+1} - h_k \geq g_k - h_k = j_k + 1$$

Donc pour $0 \leq \mu_1 \leq \nu_1 \leq \cdots \leq \mu_m \leq \nu_m \leq n$ fixés, on obtient l'organisation suivante des indices:

$$\begin{aligned} 0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{\mu_1} < j_1 < i_{\nu_1+1} < i_{\nu_1+2} < \cdots < i_{\mu_2} < j_2 < \cdots \\ \cdots < j_k < i_{\nu_k+1} < i_{\nu_k+2} < \cdots < i_{\mu_{k+1}} < j_{k+1} < \cdots \\ \cdots < i_{\mu_m} < j_m < i_{\nu_m+1} < i_{\nu_m+2} < \cdots < i_{\mu_{m+1}} = n. \end{aligned}$$

On note $I_{\mu,\nu}$ l'ensemble de ces indices pour $0 \leq \mu_1 \leq \nu_1 \leq \cdots \leq \mu_m \leq \nu_m \leq n$ fixés et on obtient:

$$E_{1,n}\left(E_{1,m}\left(a; b^1, \cdots, b^m\right); c_1, \cdots c_n\right) =$$

$$\sum_{0\leq\mu_1\leq\nu_1\leq\cdots\leq\mu_m\leq\nu_m\leq n} \sum_{I_{\mu,\nu}} a_{0,i_1} c_1 \cdots c_{\mu_1} a_{\mu_1+1,j_1} E_{1,\nu_1-\mu_1}\left(b^1; c_{\mu_1+1}, \cdots, c_{\nu_1}\right) a_{j_1+1,i_{\nu_1+1}} c_{\nu_1+1} \cdots$$

$$\cdots E_{1,\nu_m-\mu_m}\left(b^m; c_{\mu_m+1}, \cdots, c_{\nu_m}\right) a_{j_m+1,i_{\nu_m+1}} c_{\nu_m+1} \cdots c_n a_{i_n+1,p} =$$

$$\sum E_{1,x}\left(a; c_1 \cdots c_{\mu_1}, E_{1,\nu_1-\mu_1}\left(b^1; c_{\mu_1+1}, \cdots, c_{\nu_1}\right), \cdots, E_{1,\nu_m-\mu_m}\left(b^m; c_{\mu_m+1}, \cdots, c_{\nu_m}\right) c_{\nu_m+1} \cdots c_n\right)$$

Où $x = n + m - \sum \nu + \sum \mu$. Ceci achève la démonstration.

Etant donné que l'algèbre des formes différentielles non commutatives $\Omega^*(A) \subset T^*(A)$, on a des opérations

$$E_{1,k} : \Omega^*(A) \otimes (\Omega^*(A))^{\otimes k} \longrightarrow T^*(A)$$

Proposition 3.5. *Ces dernières opérations prennent valeurs dans* $\Omega^*(A)$

Démonstration 3.6. Soient $\omega = a_0 da_1 \cdots da_n \in \Omega^n(A)$, $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k \in \Omega^*(A)$. Raisonnons par récurrence sur n. Pour $n = 1$, $E_{1,1}(\omega; \theta) = \omega \underset{1}{\smile} \theta \in \Omega^*(A)$. Pour n, $\omega = a_0 da_1 \cdots da_{n-1}(1 \otimes a_n - a_n \otimes 1) = \omega_1 \otimes a_n - \omega_1 a_n \otimes 1$ où $\omega_1 = a_0 da_1 \cdots da_{n-1}$. Posons $\omega = \sum_i \omega^i$, où $\omega^i \in T^n(A)$. On a alors

$$\begin{gathered} E_{1,k}(\omega; \theta_1, \cdots, \theta_k) = \sum_i \sum_{0\leq j_1<\cdots<j_k<n} \omega^i_{0,j_1} \theta_1 \omega^i_{j_1+1,j_2} \theta_2 \cdots \theta_k \omega^i_{j_k+1,n} = \\ \sum_{0\leq j_1<\cdots<j_k<n-1} \omega^i_{0,j_1} \theta_1 \omega^i_{j_1+1,j_2} \theta_2 \cdots \theta_k \omega^i_{j_k+1,n} + \\ \sum_{0\leq j_1<\cdots<j_{k-1}<j_k=n-1} \omega^i_{0,j_1} \theta_1 \omega^i_{j_1+1,j_2} \theta_2 \cdots \theta_k \omega^i_{j_k+1,n} = \\ E_{1,k}(\omega_1; \theta_1, \cdots, \theta_k) da_n + E_{1,k-1}(\omega_1; \theta_1, \cdots, \theta_{k-1}) \theta_k a_n + \\ E_{1,k-1}(\omega_1 a_n; \theta_1, \cdots, \theta_{k-1}) \theta_k \in \Omega^*(A) \end{gathered}$$

D'où le résultat. D'après le théorème 3.3, le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 3.7. *L'algèbre des formes différentielles non commutatives* $\Omega^*(A)$ *est une algèbre de Gerstenhaber-Voronov.*

References

[1] N. Battikh, *Cup i-produits sur les formes diff érentielles non commutatives et carrés de Steenrod,* Journal of Algebra. **313** (2007), pp. 531–553.

[2] H. J. Baues, *The double bar and cobar constructions,* Compositio Math. **43** (1981), pp. 331–341.

[3] C. Berger, B Fresse, *Combinatorial operad actions on cochains,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **137** (2004), pp. 135–174.

[4] A. Connes, *Noncommutative differential geometry*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci, **62** (1985), pp. 257–360.

[5] A. Dold, R, Thom. Une généralisation de la notion d'espace fibré. Application aux produits symétriques infinis. C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 242 (1956) 1680-1682.

[6] M. Gerstenhaber. The cohomology structure of an associative ring. Ann. of Math. 78 (1963), 267-288.

[7] M. Gerstenhaber and A. Voronov. Higher operations on Hochschild complex. Functional Annal. Appl. 29 (1995), 1-6.

[8] B. Gray. Homotopy theory. Academic Press. 1975.

[9] T. Kadeishvili. Twisting elements in homotopy G-algebras. Progress in Mathematics, Birkhauser. Vol. 287 (2011), 181-200.

[10] T. Kadeishvili. On the cobar construction of a bialgebra. Homology, homotopy and Appl. Vol. 7 (2). 2005. 109-122.

[11] M. Karoubi. Formes différentielles non commutatives et cohomologie à coefficients arbitraires. Tran. Amer. Math. Soc. 347 (1995) 4277-4299.

[12] M. Karoubi. Formes topologiques non commutatives. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 28 (4) (1995) 477-492.

[13] M. Karoubi. Homologie cyclique et K-théorie. Astérisque 149. Société Mathématique de France (1987).

[14] J. L. Loday. Cyclic Homology. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Volume 301 (1998).

[15] J. E. McClure and J. H. Smith. Multivariable cochain operations and little n-cubes. J. Amer. Math. Soc. 16 (2003) 681-704.

Received 13 of june 2017; revised revision date